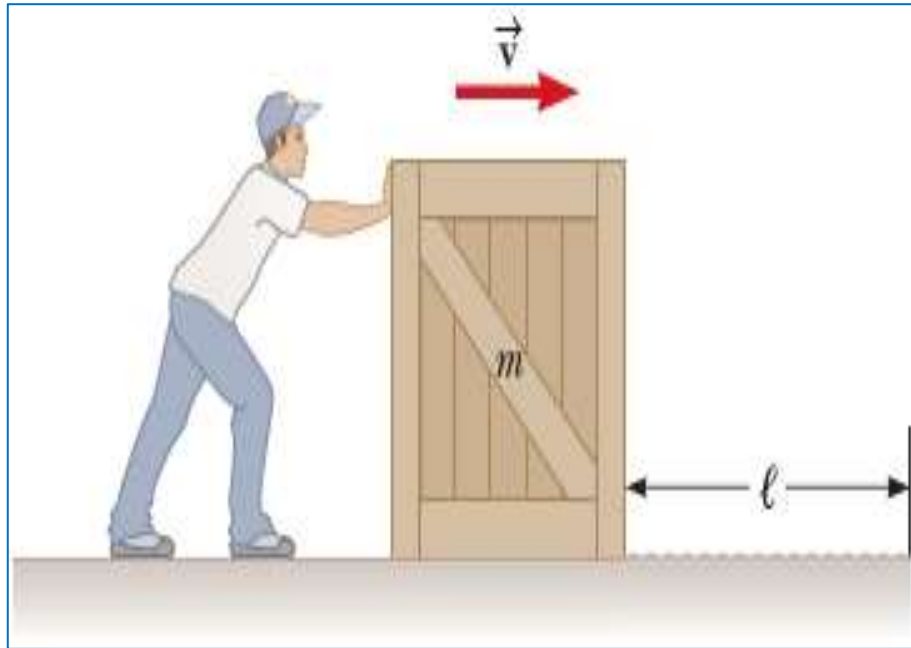


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο



ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

3. ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

3.1. Πως ορίζεται το έργο σταθερής δύναμης

✧ Ένα σώμα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης F . Το σώμα πηγαίνει από την θέση Α στην θέση Γ. Τότε το **έργο** συμβολίζεται με (W), είναι μονόμετρο μέγεθος, έχει διαστάσεις ενέργειας και εκφράζει το ποσό της ενέργειας που μεταβιβάζεται στο σώμα από την θέση Α στην θέση Γ.

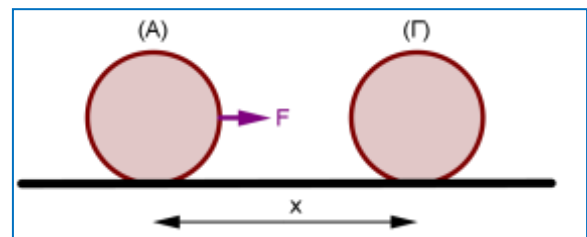
Μετريέται στο S.I. σε Joule ($N \cdot m$) και

δίνεται από την σχέση :

$$W_{(F)} = (\text{Δύναμη}) \cdot (\text{Απόσταση}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{(F)} = F \cdot x$$

$$1J = N \cdot m$$



Πότε το έργο είναι θετικό-αρνητικό;

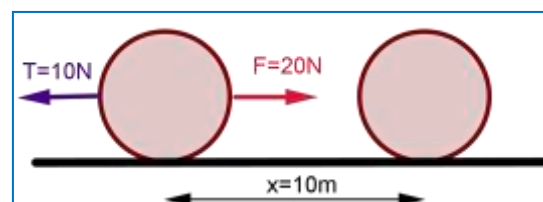
- ✧ Το έργο είναι θετικό όταν η δύναμη βοηθά στην κίνηση.
- ✧ Το έργο είναι αρνητικό όταν η δύναμη αντιστέκεται στην κίνηση.

Εφαρμογή

Να βρεθεί το έργο των δυνάμεων που ασκούνται στα παρακάτω σώματα:

$$W_{(F)} = +F \cdot x = 20 \cdot 10 = 200J$$

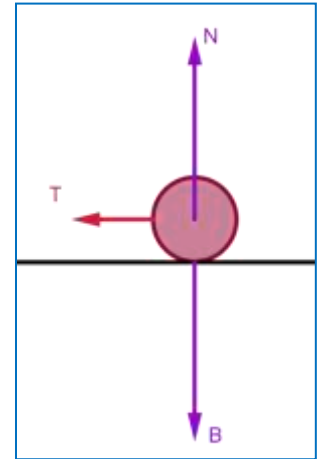
$$W_{(T)} = -T \cdot x = -10 \cdot 10 = -100J$$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B$$

$$T = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$$

$$W_{(T)} = -T \cdot x = -\mu \cdot m \cdot g \cdot x$$



ΠΡΟΣΟΧΗ !!

★ Η σχέση $W = F \cdot x$ ισχύει μόνο για **ΣΤΑΘΕΡΕΣ** δυνάμεις.

π.χ. $F = 10\text{N}$ $W = F \cdot x = 10x$

★ Εάν η F δεν είναι σταθερή τότε $W = F \cdot x$ (Άσχετος)

π.χ. $F_{ελ} = Kx = \text{μεταβλητή}$ $W_{(F_{ελ})} = F_{ελ} \cdot x$ (Λαθάρα)

$F = 5 + 3x$ (μεταβλητή) $W_{(F)} = F \cdot x$ (Λαθάρα)

Τι μας εκφράζει το έργο μιας δύναμης;

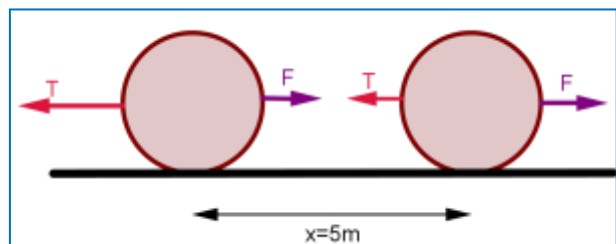
Το έργο μιας δύναμης μας εκφράζει:

⇒ Την μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα σε κάποιο άλλο.

⇒ Την μετατροπή μιας μορφής ενέργειας σε κάποια άλλη.

Παράδειγμα 3.1

Έχουμε ένα σώμα που κινείται σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση της δύναμης F και θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F και της τριβής και τι μας εκφράζει το κάθε έργο.



Απάντηση

$W_{(F)} = F \cdot x = 5 \cdot 10 = 50J$ μας δείχνει την ενέργεια που ξοδεύει ο άνθρωπος και την μεταφέρει στο σώμα.

$W_{(T)} = -T \cdot x = -2 \cdot 5 = -10J$ μας δείχνει την ενέργεια που μετατρέπεται πάντα σε θερμότητα η οποία φεύγει από το σώμα στο περιβάλλον.

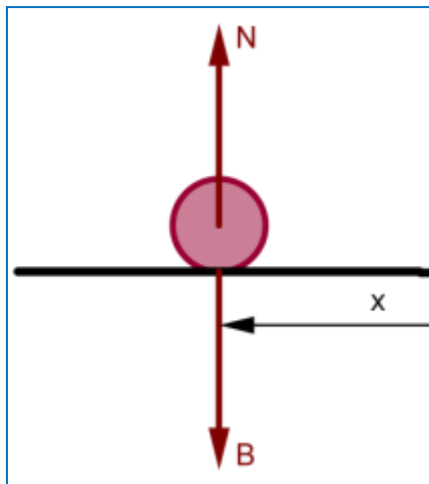
$W_{\Sigma F_x} = (F - T) \cdot x = 40J$ μας δείχνει την ενέργεια που μετατρέπεται σε κινητική.

Άρα η ενέργεια που ξοδεύουμε $W_F \begin{cases} W_T : \text{μετατρέπεται σε θερμότητα} \\ W_{\Sigma F_x} : \text{μετατρέπεται σε κινητική} \end{cases}$

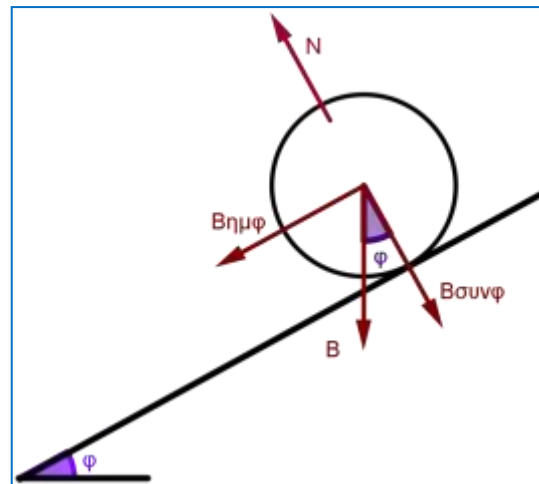
✦ Πότε το έργο μιας δύναμης είναι μηδέν;

ΚΑΝΟΝΑΣ

Όταν η δύναμη είναι κάθετη στο διάστημα.



$$W_{(B)} = W_{(N)} = 0$$



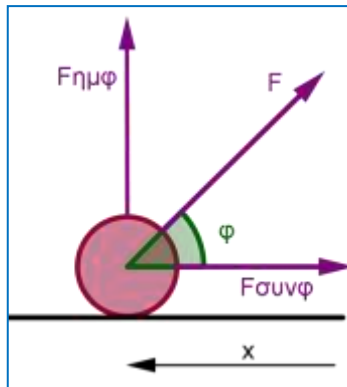
$$W_{(B\sigma\upsilon\nu\phi)} = W_{(N)} = 0$$

$$W_{(B\eta\mu\phi)} = \pm (B\eta\mu\phi) \cdot x$$

όπου (+) όταν κατεβαίνει

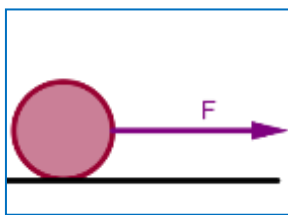
(-) όταν ανεβαίνει

3.2. Πώς βρίσκω το έργο μιας δύναμης που αναλύεται σε δύο συνιστώσες



$$W_F = W_{F\cos\varphi} + W_{F\sin\varphi}$$

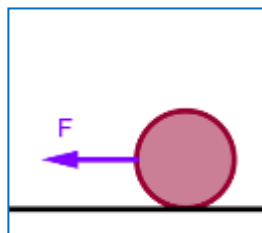
$$W_F = F \cdot x \cdot \cos\varphi$$



α) Αν $\varphi=0$:

$$\cos 0^\circ = 1$$

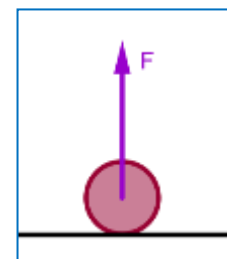
$$W_F = F \cdot x$$



β) Αν $\varphi=180^\circ$: $\cos 180^\circ$

$$= -1$$

$$W_F = -F \cdot x$$



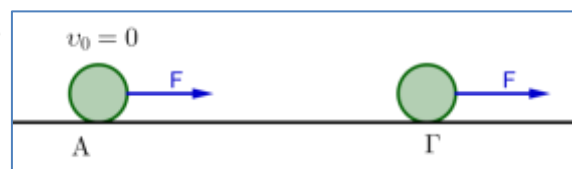
γ) Αν $\varphi=90^\circ$:

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$W_F = 0$$

Παράδειγμα 3.2

Ένα σώμα αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,1$ και κινείται με την επίδραση



οριζόντιας δύναμης $F=10\text{N}$ όπως το διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα έργα όλων των δυνάμεων εάν δίνεται η μάζα του σώματος $m=1\text{kg}$ και η μετατόπιση του σώματος $A\Gamma=10\text{m}$.

Απάντηση

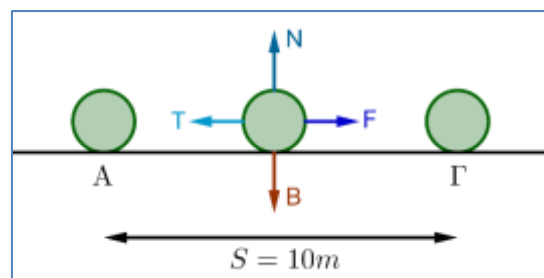
$$W_N = 0 \text{ και } W_B = 0$$

$$W_F = F \cdot S = 10 \cdot 10 = 100\text{Joule}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$$

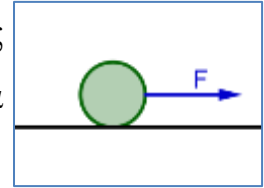
$$W_T = -T \cdot S = -\mu \cdot N \cdot S = -\mu \cdot m \cdot g \cdot S =$$

$$= -0,1 \cdot 10 \cdot 10 = -10\text{Joule}$$



Παράδειγμα 3.3

Ένα σώμα αρχικά είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένας άνθρωπος ασκεί οριζόντια δύναμη F όπως στο διπλανό σχήμα και το μετατοπίζει κατά $S = 4\text{m}$. Εάν δίνεται ότι ο άνθρωπος

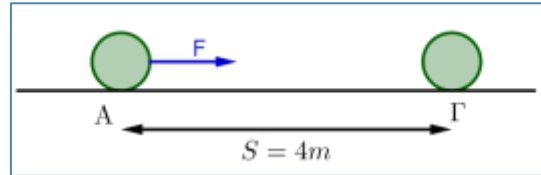


μεταβίβασε στο σώμα ενέργεια ίση με 20Joule , να βρείτε το μέτρο της δύναμης F

Απάντηση

$$W_F = F \cdot S$$

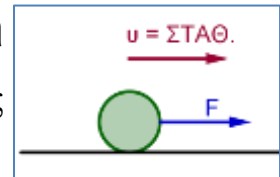
W_F = μας εκφράζει την ενέργεια που μεταβιβάζει ο άνθρωπος στο σώμα.



$$\text{Άρα, } W_F = 20\text{Joule} \Rightarrow F \cdot S = 20 \Rightarrow F \cdot 4 = 20 \Rightarrow F = \frac{20}{4} = 5\text{N}$$

Παράδειγμα 3.4

Ένα σώμα $m = 4\text{kg}$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης όπως στο διπλανό σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου επιπέδου είναι $\mu = 0,1$.



Να βρεθούν:

- α)** Το έργο της δύναμης F .
- β)** Το έργο της τριβής.

Δίνεται ότι η μετατόπιση του σώματος είναι $x = 20\text{m}$.

Απάντηση

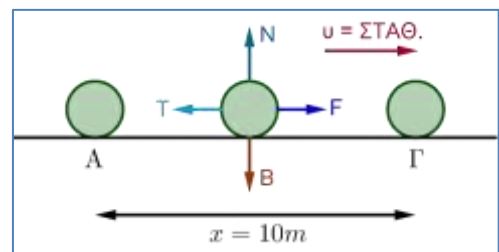
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T = 0 \Rightarrow F = T \Rightarrow F = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow$$

$$F = 0,1 \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow F = 4\text{N}$$

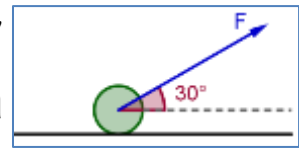
$$\text{Άρα } W_F = F \cdot x = 4 \cdot 20 = 80\text{J}.$$

$$W_T = -T \cdot x = -\mu \cdot m \cdot g \cdot x = -0,1 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 20 = -80\text{J}$$



Παράδειγμα 3.5

Σώμα μάζας $m = 20\text{kg}$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση σταθερής δύναμης μέτρου $F = 200\text{N}$ που η διεύθυνση της σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τον οριζόντιο



άξονα όπως στο διπλανό σχήμα. Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,5$, να βρείτε:

α) Το έργο της δύναμης F .

β) Το έργο της τριβής.

Δίνεται ότι η μετατόπιση του σώματος είναι $S = 20\text{m}$.

Απάντηση

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F \sin 30 = m \cdot g \Rightarrow$$

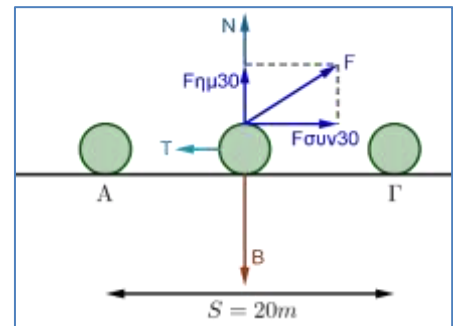
$$N = m \cdot g - F \sin 30 \Rightarrow N = 200 - 200 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$N = 200 - 100 \Rightarrow N = 100\text{N}$$

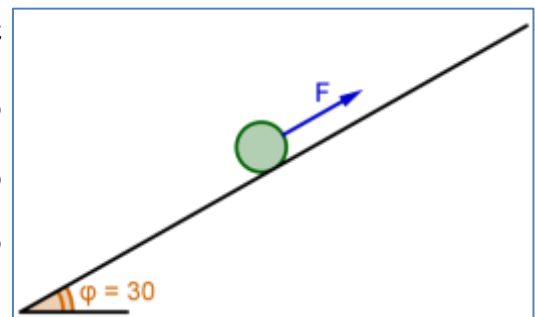
$$W_F = W_{F \cos 30} + W_{F \sin 30} = F \cos 30 \cdot S =$$

$$= 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20 \Rightarrow W_F = 2000\sqrt{3}\text{J}$$

$$W_T = -T \cdot S = -\mu \cdot N \cdot S = -0,5 \cdot 100 \cdot 20 = 1000\text{Joule}$$

**Παράδειγμα 3.6**

Σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ κινείται προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$ υπό την επίδραση δύναμης F σταθερού μέτρου $F = 100\text{N}$ που είναι παράλληλη με το κεκλιμένο όπως στο διπλανό σχήμα. Εάν ο



συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,1$, να βρείτε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα εάν δίνεται ότι η μετατόπιση του σώματος είναι $S = 10\text{m}$.

Απάντηση

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \sin \varphi \Rightarrow N = m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

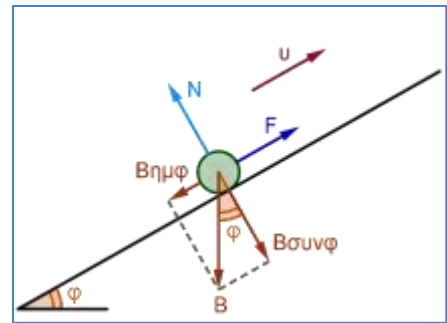
$$W_F = F \cdot S = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ J}$$

$$W_T = -T \cdot S = -\mu \cdot N \cdot S = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot S =$$

$$= -0,5 \cdot 2 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \Rightarrow W_T = -10\sqrt{3} \text{ J}$$

$$W_B = W_{B \sin \varphi}^0 + W_{B \eta \mu \varphi} = -m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi \cdot S = -0,1 \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = -100 \text{ Joule}$$

$$W_N = 0$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΜΕ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ**Ερώτηση 3.7**

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

Το έργο μιας δύναμης (W_F) είναι:

- α)** Μονόμετρο μέγεθος
- β)** Εκφράζει το ποσό ενέργειας που μεταφέρεται από τη δύναμη στο σώμα, όταν αυτό μετατοπίζεται
- γ)** Ορίζεται για μία χρονική στιγμή
- δ)** Έχει μονάδες μέτρησης τα N

Ερώτηση 3.8

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

Το έργο μιας δύναμης (W_F)

- α)** Έχει διαστάσεις ενέργειας.
- β)** Δεν εξαρτάται από τη μετατόπιση του σώματος, παρά μόνο από το μέτρο της δύναμης.
- γ)** Εξαρτάται από τη σχετική κατεύθυνση των διανυσμάτων της δύναμης και της μετατόπισης.
- δ)** Δεν είναι δυνατό, το έργο μιας δύναμης να είναι μηδέν.

Ερώτηση 3.9

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

Μια σταθερή δύναμη F ασκείται σε σώμα, το οποίο κινείται ευθύγραμμα, και σχηματίζει γωνία θ , με το διάνυσμα της μετατόπισης Δx . Το έργο της δύναμης, θα υπολογίζεται από τον τύπο:

- | | |
|--|--|
| α) $W_F = F \cdot \Delta x$ | β) $W_F = F \cdot \Delta x \cdot \eta\mu\theta$ |
| γ) $W_F = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ | δ) $W_F = -F \cdot \Delta x$ |

Ερώτηση 3.10

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;
Όταν το έργο μίας δύναμης είναι θετικό ($W_F > 0$) – παραγόμενο

- α) Η δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα
- β) Η δύναμη είναι αντίρροπη της μετατόπισης
- γ) Η γωνία θ που σχηματίζει η δύναμη με τη μετατόπιση είναι αμβλεία
- δ) Το σώμα μπορεί να παραμένει ακίνητο

Ερώτηση 3.11

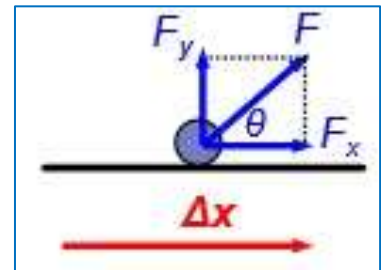
Μία σταθερή δύναμη F ασκείται σε ένα σώμα. Σε ποιες από τις επόμενες περιπτώσεις το έργο της δύναμης αυτής είναι οπωσδήποτε μηδέν;

- α) Η δύναμη F έχει την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος
- β) Το σώμα είναι ακίνητο
- γ) Η δύναμη F είναι κάθετη στη μετατόπιση
- δ) Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν

Ερώτηση 3.12

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

Το σώμα του διπλανού σχήματος, κινείται ευθύγραμμα και δέχεται σταθερή δύναμη F . Το έργο της δύναμης F για τη μετατόπιση Δx , υπολογίζεται από τη σχέση:



- | | |
|---|------------------------------|
| α) $W_F = F \cdot \Delta x \cdot \sin \theta$ | β) $W_F = F \cdot \Delta x$ |
| γ) $W_F = 0$ | δ) $W_F = W_{F_x} + W_{F_y}$ |

Ερώτηση 3.13

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

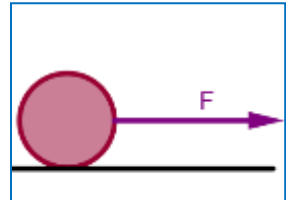
- α) Το έργο του βάρους ενός σώματος, είναι πάντα μηδέν.
- β) Το έργο της τριβής ολίσθησης ενός σώματος είναι πάντα αρνητικό.
- γ) Το έργο της κάθετης αντίδρασης του δαπέδου είναι πάντα μηδέν.
- δ) Το έργο της τριβής ολίσθησης, μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να είναι και θετικό.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.18

Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται με σταθερή επιτάχυνση 18m/sec^2 . Εάν το σώμα διανύει $x=0,5\text{m}$ να βρεθούν τα έργα των δυνάμεων εάν $\mu=0,2$.

(Απάντηση: $W_F = 10\text{J}, W_T = -1\text{J}$.)



Άσκηση 3.19

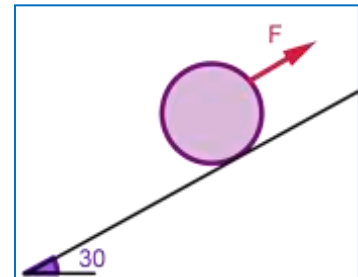
Σώμα $m=2\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση οριζόντιας δύναμης F . Εάν ο $\mu=0,2$ να βρεθούν τα έργα όλων των δυνάμεων για $x=10\text{m}$.

(Απάντηση: $40\text{J}, -40\text{J}$.)

Άσκηση 3.20

Σώμα $m=10\text{kg}$ κινείται με την επίδραση της δύναμης $F=200\text{N}$. Εάν $\mu=0,1$ να βρείτε τα έργα των δυνάμεων για $x=20\text{m}$.

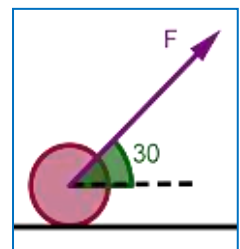
(Απάντηση: $4000, -1000, -100\sqrt{3}$.)



Άσκηση 3.21

Σώμα $m=10\text{kg}$ κινείται με την επίδραση της δύναμης $F=20\text{N}$. Εάν δίνεται $\mu=0,5$ και $x=5\text{m}$, να βρεθούν τα έργα των δυνάμεων.

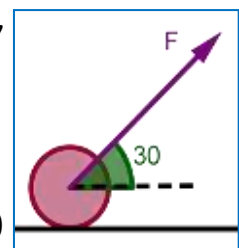
(Απάντηση: $50\sqrt{3}\text{J}, -225\text{J}$)



Άσκηση 3.22

Σώμα $m=40\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $u=2\text{m/sec}$ με την επίδραση της F . Εάν $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ να βρεθεί το έργο της F για $t=3\text{sec}$.

(Απάντηση: $400\sqrt{3}$.)

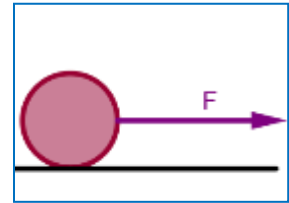


Άσκηση 3.23

Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται με $a=10\text{m/sec}^2$.

Εάν $\mu=0,2$ να βρεθούν:

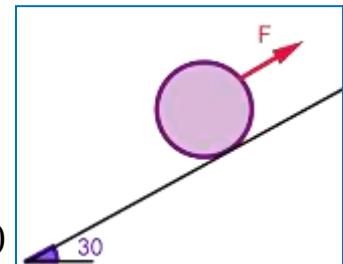
- α)** η δύναμη F .
β) το έργο της F για $x=5\text{m}$.



(Απάντηση: **α)** 24N, **β)** 120J.)

Άσκηση 3.24

Σώμα $m=2\text{kg}$ κινείται με $a=2\text{m/sec}^2$. Να βρεθεί το έργο της F για $x=2\text{m}$. Δίνεται ότι το επίπεδο είναι λείο.

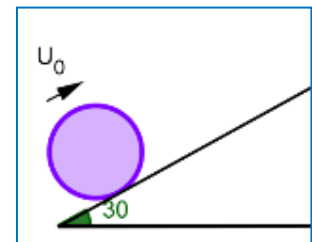


(Απάντηση: 28J.)

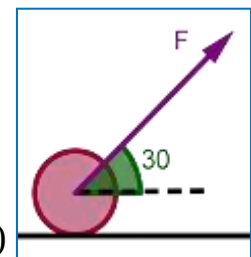
Άσκηση 3.25

Εάν δίνεται ότι το σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ έχει αρχική ταχύτητα $u_0=10\text{m/s}$, σταματά σε $t=2\text{sec}$ και ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,1$, να βρεθούν τα έργα των δυνάμεων μέχρι να σταματήσει.

(Απάντηση: $W_T = -5\sqrt{3}\text{J}$, $W_B = -50\text{J}$)

**Άσκηση 3.26**

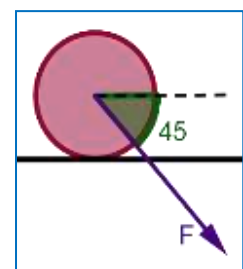
Σώμα $m=1\text{kg}$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο. Εάν $\mu=0,1$ και $F=10\text{N}$, να βρείτε τα έργα όλων των δυνάμεων για $x=1\text{m}$.



(Απάντηση: $-0,5\text{J}$, $5\sqrt{3}\text{J}$.)

Άσκηση 3.27

Δίνεται $m=2\text{kg}$, $F=50\sqrt{2}\text{N}$ και $\mu=0,2$. Να βρείτε τα έργα των δυνάμεων για $x=3\text{m}$.



(Απάντηση: 150J, -42J.)

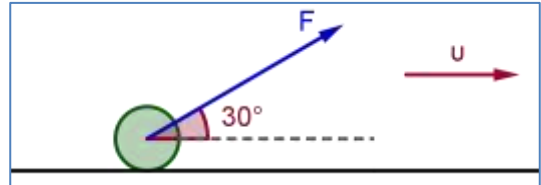
Άσκηση 3.28

Δίνεται $m=1\text{kg}$, $\mu=0,1$ και $F=3\text{N}$ οριζόντια δύναμη. Να βρεθούν τα έργα όλων των δυνάμεων για το διάστημα $x=75\text{m}$.

(Απάντηση: $W_T = -75\text{J}$, $W_B = 225\text{J}$)

Άσκηση 3.29

Ένα σώμα μάζας $m=4\text{kg}$ ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v=3\text{m/s}$ με την επίδραση σταθερής δύναμης



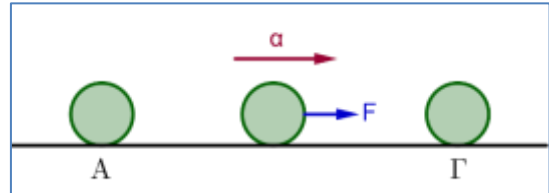
F που σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα όπως στο διπλανό σχήμα.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Να βρείτε το έργο της δύναμης F για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 3\text{sec}$.

(Απάντηση: 240J)

Άσκηση 3.30

Το σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F όπως στο διπλανό



σχήμα με σταθερή επιτάχυνση $a=10\text{m/s}^2$. Να βρείτε:

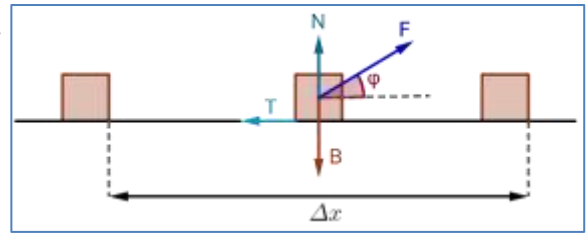
- α)** Την δύναμη F .
- β)** Την ενέργεια που μεταβιβάζεται στο σώμα για να μετατοπισθεί κατά $x=10\text{m}$.

Δίνεται ότι το επίπεδο παρουσιάζει συντελεστή τριβής με το σώμα $\mu=0,2$.

(Απάντηση: **α)** $F=24\text{N}$, **β)** 240J)

Άσκηση 3.31

Κιβώτιο μάζας $m = 2\text{kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Άνθρωπος ασκεί στο κιβώτιο σταθερή δύναμη μέτρου $F = 10\text{N}$, σε διεύθυνση που σχηματίζει με το δάπεδο



γωνία φ προς τα πάνω με $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$. Το κιβώτιο παρουσιάζει με το δάπεδο

συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{1}{4}$. Εάν το σώμα μετατοπίζεται για χρονικό

διάστημα $\Delta t = 10\text{sec}$, να βρείτε:

- α)** το ποσό της ενέργειας που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στο κιβώτιο.
β) το ποσοστό αυτής της ενέργειας που έγινε θερμότητα λόγω τριβών.

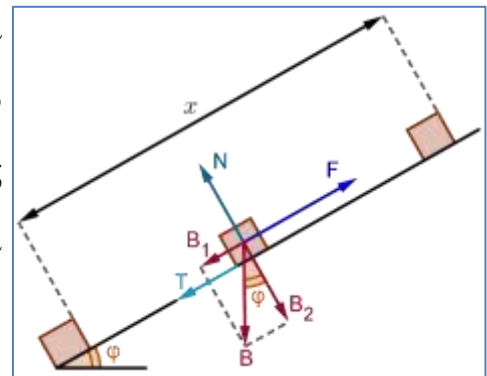
Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$.

(Απάντηση: **α)** 450J, **β)** 50%)

Άσκηση 3.32

Το σώμα του σχήματος, μάζας $m = 2\text{kg}$, ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι

$\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μεταβιβαζόμενη στο σώμα



ποσότητα ενέργειας μέσω της δύναμης $\vec{F}$ για μετατόπιση του σώματος $x = 8\text{m}$.

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

(Απάντηση: 80 J)

3.3. Ενεργειακά Θεωρήματα

1. Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Το εφαρμόζουμε για να βρούμε:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ⇒ διάστημα | ⇒ τιμή της F |
| ⇒ ταχύτητα | ⇒ τιμή της τριβής T |
| ⇒ συντελεστή τριβής | |

Όταν δίνεται ο χρόνος η πρώτη μας επιλογή δεν είναι το ΘΜΚΕ αλλά οι εξισώσεις κίνησης.

Το ΘΜΚΕ χρησιμοποιείται σε όλες τις κινήσεις:

- | | |
|---------------|------------|
| ★ οριζόντιες | ★ πλάγιες |
| ★ κατακόρυφες | ★ κυκλικές |

2. Πώς ορίζεται η κινητική ενέργεια

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος και δίνεται από την σχέση:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot U^2$$

✱ Χρήσιμες εκφράσεις:

- ⇒ σώμα εκτοξεύεται: $U_0 \neq 0$, $K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m \cdot U_0^2$
- ⇒ σώμα αφήνεται: $U_0 = 0$, $K_{\text{αρχ}} = 0$

3. Πώς εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ

$$K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \text{Έργα όλων των δυνάμεων}$$

Βήμα 1^ο: Σχεδιάζω σε μια τυχαία θέση της διαδρομής του σώματος όλες τις δυνάμεις.

Βήμα 2^ο: Εφαρμόζω ΘΜΚΕ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.33

Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος στην θέση (Γ) στις παρακάτω περιπτώσεις:

Απάντηση

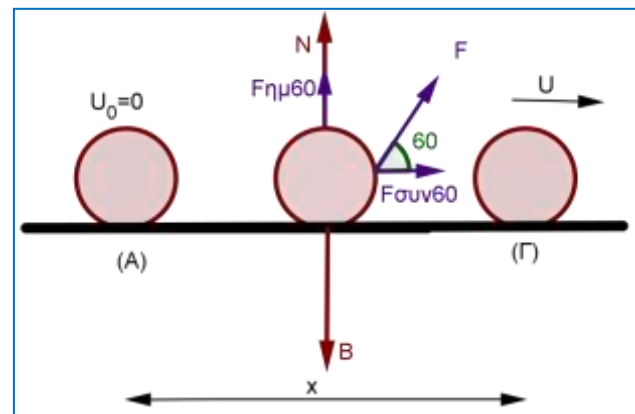
α) Εφαρμόζω ΘΜΚΕ(Α – Γ):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_{F\cos 60}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 = F\cos 60 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}2 \cdot U^2 = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow U = \sqrt{15} \text{ m/sec}$$



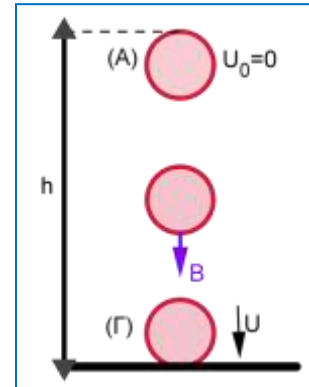
β) Εφαρμόζω ΘΜΚΕ(Α – Γ):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_B$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 = B \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m \cdot U^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^2 = 2g \cdot h \Rightarrow U = \sqrt{2g \cdot h}$$



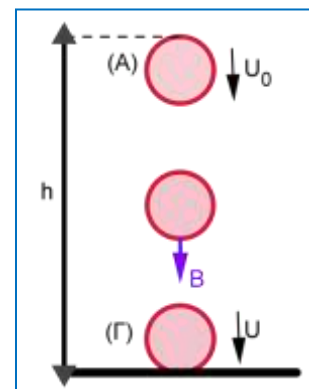
γ) Εφαρμόζω ΘΜΚΕ(Α – Γ):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_B$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^2 - U_0^2 = 2g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{2g \cdot h + U_0^2}$$



Άσκηση 3.34

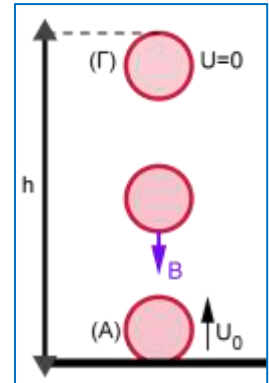
Να βρεθεί σε πόσο ύψος το σώμα σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Απάντηση

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ(Α – Γ)

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = -W_B$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{U_0^2}{2g}$$

**Άσκηση 3.35**

Να βρεθεί το διάστημα που θα έχει διανύσει το σώμα, όταν σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Απάντηση

Εφαρμόζω ΘΜΚΕ(Α – Γ)

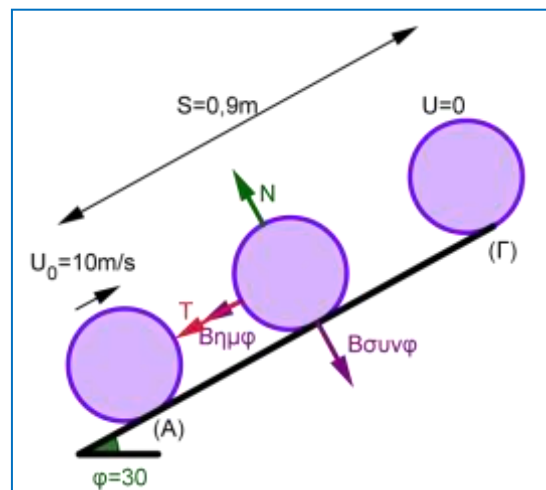
$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = -W_{B\eta\mu\phi} - W_T$$

$$-\frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = -T \cdot x - B \cdot \eta\mu\phi \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot x + m \cdot g \cdot \eta\mu\phi \cdot x \Rightarrow$$

$$50 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow$$

$$50 = 12,5x \Rightarrow x = \frac{50}{12,5} = 4m$$



Άσκηση 3.36

Να βρεθεί η ταχύτητα U_1 .

Απάντηση

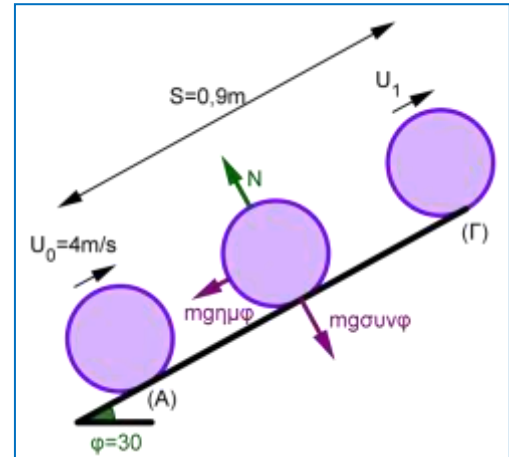
Εφαρμόζω ΘΜΚΕ(A – Γ)

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = -W_{mg\eta\mu\phi}$$

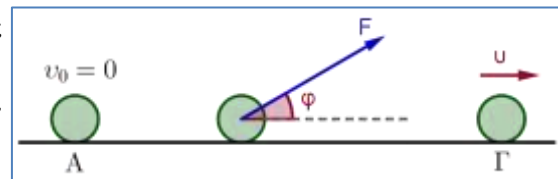
$$\frac{1}{2}m \cdot U_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = -m \cdot g \cdot \eta\mu\phi \cdot S \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}U_1^2 - \frac{16}{2} = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,9 \Rightarrow U_1^2 - 16 = -9 \Rightarrow$$

$$U_1 = \sqrt{7} \text{ m/s}$$

**Άσκηση 3.37**

Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ αρχικά είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 20 \text{ N}$ όπως στο διπλανό σχήμα,



σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 60^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπίζεται για διάστημα $x = 4 \text{ m}$.

Απάντηση

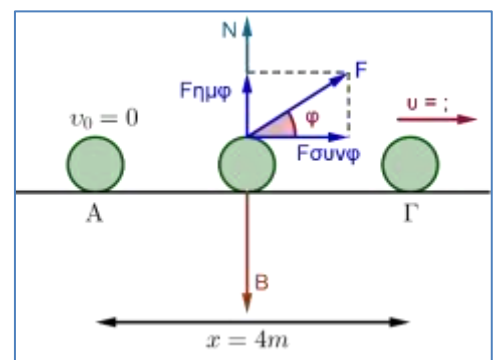
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. (A – Γ):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = \cancel{W_N^0} + \cancel{W_B^0} + \cancel{W_{F\eta\mu\phi}^0} + W_{F\sigma\upsilon\nu\phi} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = F\sigma\upsilon\nu\phi \cdot x \Rightarrow mv^2 = 2F\sigma\upsilon\nu\phi \cdot x \Rightarrow$$

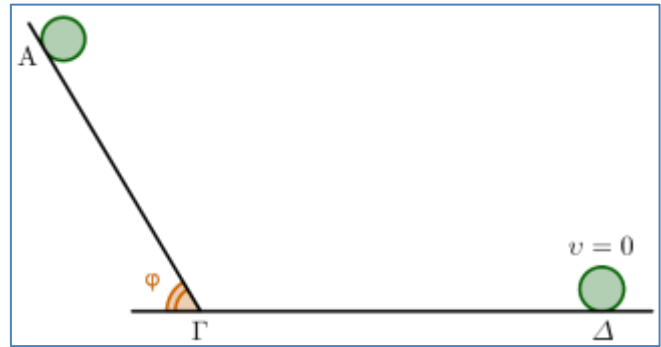
$$v = \sqrt{\frac{2F\sigma\upsilon\nu\phi \cdot x}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4}{1}} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{80} \Rightarrow v = \sqrt{5 \cdot 16} \Rightarrow v = 4\sqrt{5} \text{ m/s}$$



Άσκηση 3.38

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 60^\circ$. Όταν φθάνει στη βάση του κεκλιμένου συνεχίζει να κινείται σε ένα οριζόντιο επίπεδο και σταματά στη θέση Δ . Να βρείτε



τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος m και των επιπέδων εάν δίνεται ότι είναι σταθερός σε όλη την διαδρομή.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι το διάστημα $ΑΓ$ είναι ίσο με το διάστημα $ΓΔ$.

Απάντηση

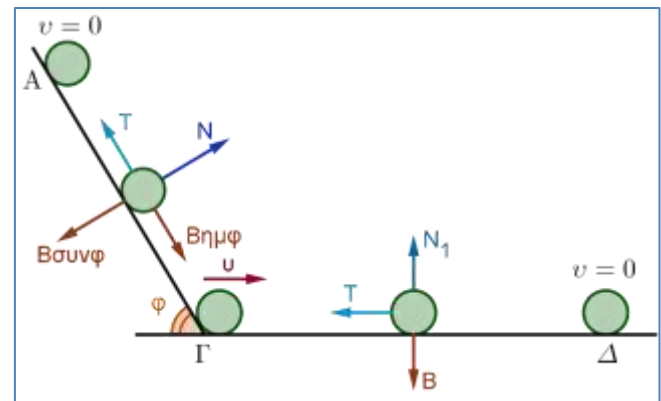
Κεκλιμένο: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$

Οριζόντιο: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m \cdot g$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. ($A - \Gamma - \Delta$):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} =$$

$$= -W_T^{(A-\Gamma)} + W_{B\eta\mu\varphi}^{(A-\Gamma)} - W_{T_1}^{(\Gamma-\Delta)} \Rightarrow$$

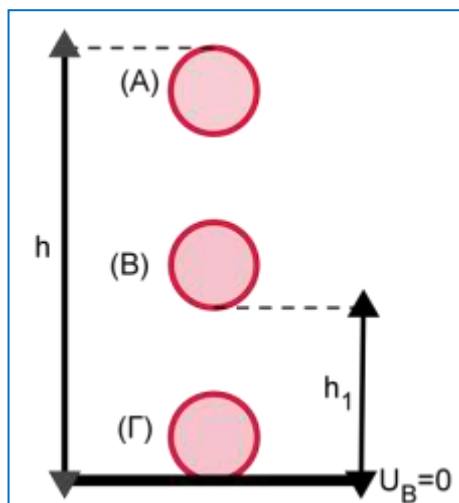


$$0 = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (ΑΓ) + m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot (ΑΓ) - \mu \cdot m \cdot g \cdot (ΓΔ) \Rightarrow$$

$$\cancel{(ΑΓ)} \cdot (\mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \mu \cdot m \cdot g) = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \cancel{(ΑΓ)} \Rightarrow$$

$$\mu \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \cancel{m} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow \mu = \frac{\eta\mu\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.4. Πώς ορίζεται η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους



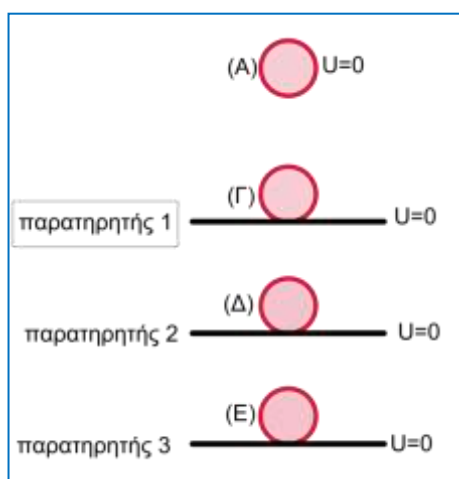
$$U_{(\text{βάρους})} = B \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

όπου h = απόσταση από το επίπεδο που θεωρούμε ότι η $U_{(B)}=0$. Αυτό το επίπεδο είναι το χαμηλότερο, δηλαδή το έδαφος.

$$U_{B(A)} = m \cdot g \cdot h$$

$$U_{B(B)} = m \cdot g \cdot h_1$$

$$U_{B(\Gamma)} = 0$$



Ο κάθε παρατηρητής μπορεί να ορίσει ένα δικό του επίπεδο, όπου η δυναμική ενέργεια θα είναι μηδέν.

	Παρατηρητής 1	Παρατηρητής 2	Παρατηρητής 3
	U_B	U_B	U_B
A	$m \cdot g \cdot (A\Gamma)$	$m \cdot g \cdot (A\Delta)$	$m \cdot g \cdot (AE)$
Γ	0	$m \cdot g \cdot (\Gamma\Delta)$	$m \cdot g \cdot (\Gamma E)$
Δ	$-m \cdot g \cdot (\Gamma\Delta)$	0	$m \cdot g \cdot (\Delta E)$
E	$-m \cdot g \cdot (\Gamma E)$	$-m \cdot g \cdot (E\Delta)$	0

ΠΡΟΣΟΧΗ !!

Όταν το σώμα είναι κάτω από το επίπεδο που θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, τότε η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική. Αρνητική δυναμική ενέργεια σημαίνει ότι πρέπει να ξοδέψω ενέργεια για να πάω το σώμα στην θέση $U_B=0$.

Επομένως, για να μην έχω αρνητική δυναμική ενέργεια, θεωρούμε πάντα $U_B=0$ στο πιο χαμηλό επίπεδο, έτσι ώστε το σώμα να είναι πάντα πιο πάνω από αυτό και άρα η δυναμική ενέργεια να είναι θετική.

3.5. Συντηρητικές ή διατηρητικές δυνάμεις

Συντηρητικές δυνάμεις είναι:

- ✦ Βάρος
- ✦ $F(\text{ελατηρίου})$
- ✦ $F(\text{ηλεκτρική})$
- ✦ $F(\text{Coulomb})$

✧ **Χαρακτηριστικά συντηρητικών δυνάμεων:**

A. Εάν η διαδρομή είναι κλειστή, τότε το $W=0$.

$$W_{(B)(A-\Gamma)} = -m \cdot g \cdot (A\Gamma)$$

$$W_{(B)(\Gamma-A)} = m \cdot g \cdot (A\Gamma)$$

$$W_{(B)(A-\Gamma-A)} = -m \cdot g \cdot (A\Gamma) + m \cdot g \cdot (A\Gamma) = 0$$

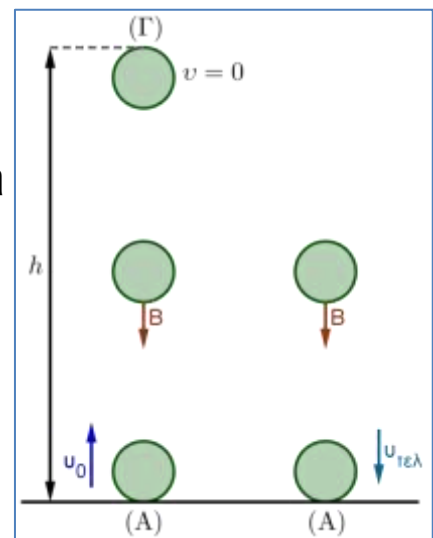
♦ Να αποδείξετε ότι η αρχική και η τελική ταχύτητα είναι ίσες.

Απόδειξη ($U_0=U_{\text{τελ}}$):

$$\text{ΘΜΚΕ: } \frac{1}{2} m \cdot U_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} m \cdot U_0^2 = W_B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \cdot U_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} m \cdot U_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \cdot U_{\text{τελ}}^2 = \frac{1}{2} m \cdot U_0^2 \Rightarrow U_{\text{τελ}} = U_0$$

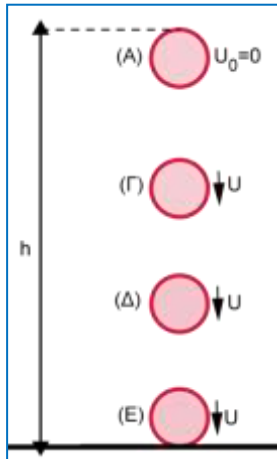


B. Όταν σε ένα σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, η ολική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή και αλλάζει μορφές, δηλαδή:

★ κινητική $\rightarrow$ δυναμική

★ δυναμική $\rightarrow$ κινητική

Ολική ενέργεια εννοούμε την μηχανική ενέργεια που είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας λόγω βάρους.



$$E_{ολ} = E_{μηχανική} = K + U_B = 0 + m \cdot g \cdot h = 100J$$

$$E_{ολ(Γ)} = K_{(Γ)} + U_{B(Γ)} = \frac{1}{2}m \cdot U^2 + m \cdot g \cdot (\Gamma E) = 100J$$

$$E_{ολ(Δ)} = K_{(Δ)} + U_{B(Δ)} = \frac{1}{2}m \cdot U^2 + m \cdot g \cdot (\Delta E) = 100J$$

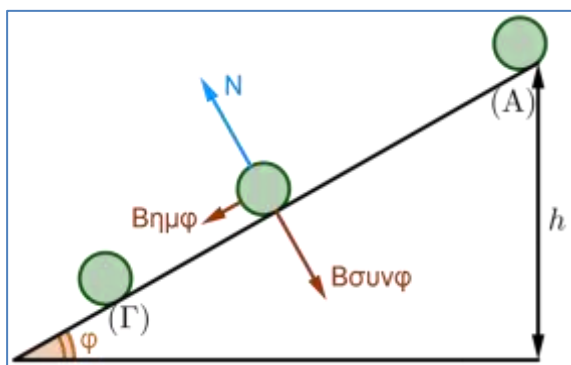
$$E_{ολ(Ε)} = K_{(Ε)} + U_{B(Ε)} = \frac{1}{2}m \cdot U^2 + 0 = 100J$$

$\left. \begin{matrix} T \\ F \end{matrix} \right\} \rightarrow$ μη συντηρητικές

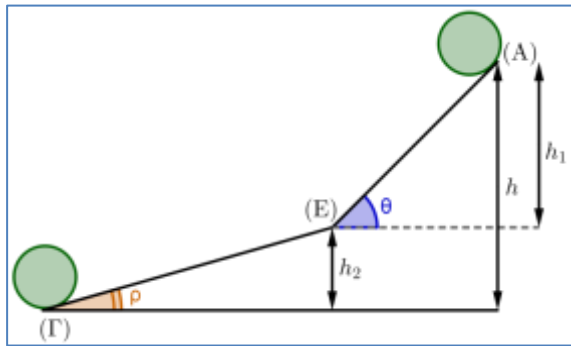
$W_{(T)} = Q$ (θερμότητα)

$W_{(F)}$ = την ενέργεια που ξοδεύω.

Γ. Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθεί ένα σώμα για να πάει από την θέση (Α) στην θέση (Β), αλλά μόνο από την αρχική – τελική θέση.



$$\begin{aligned} W_B &= W_{B_{\sigma\upsilon\nu\phi}} + W_{B_{\eta\mu\phi}} = \\ &= 0 + B \cdot \eta\mu\phi \cdot (ΑΓ) \\ &= B \cdot \frac{h}{(ΑΓ)} \cdot (ΑΓ) = B \cdot h \end{aligned}$$



$$W_{B(A-E)} = B \cdot h_1$$

$$W_{B(E-\Gamma)} = B \cdot h_2$$

$$W_{B(A-E-\Gamma)} = B \cdot h_1 + B \cdot h_2 =$$

$$= B \cdot (h_1 + h_2) = B \cdot h$$

✱ Πως εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε.)

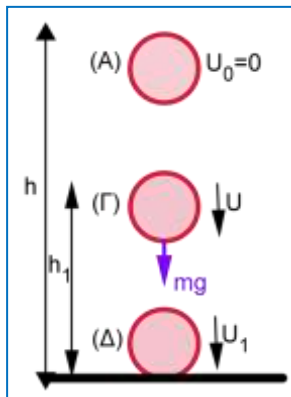
$$E_{ολ(τελ)} - E_{ολ(αρχ)} = W_F - W_T$$

(στο δεύτερο μέλος μπαίνουν μόνο τα έργα των μη συντηρητικών δυνάμεων)

εάν $T=F=0$ (δεν υπάρχουν)

$$E_{ολ(τελ)} - E_{ολ(αρχ)} = 0 \Rightarrow E_{ολ(τελ)} = E_{ολ(αρχ)} \quad (\text{ΑΔΜΕ})$$

Μόνο όταν όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές.



$$E_{ολ} = E_{μηχ} = K + U_B$$

$$E_{ολ(A)} = K + U_B = m \cdot g \cdot h$$

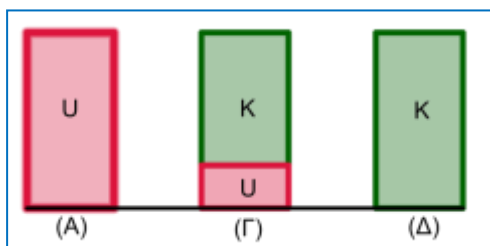
$$E_{ολ(\Gamma)} = \frac{1}{2} m \cdot U^2 + m \cdot g \cdot h_1$$

$$E_{ολ(\Delta)} = \frac{1}{2} m \cdot U_1^2$$

Στην θέση Α: η μηχανική ενέργεια ταυτίζεται με την δυναμική.

Στην θέση Γ: μειώνεται η δυναμική, αυξάνεται η κινητική.

Στην θέση Δ: η δυναμική ενέργεια γίνεται μηδέν και η κινητική γίνεται max.



$$E_{ολ(A)} = E_{ολ(\Gamma)} = E_{ολ(\Delta)}$$

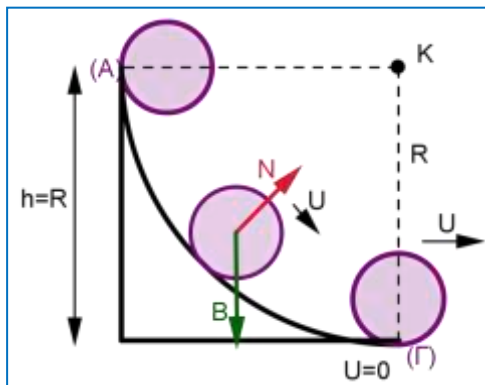
$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot U^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m \cdot U_1^2$$

3.6. Πώς βρίσκουμε το έργο των συντηρητικών δυνάμεων

Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης βρίσκεται εάν από την αρχική δυναμική ενέργεια αφαιρέσουμε την τελική δυναμική ενέργεια.

$$W_{\Sigma\Delta} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda}$$

$$W_B \begin{cases} B = \text{σταθερό } W_B = \pm B \cdot h \\ B = \text{συντηρητική δύναμη } W_B = U_{B(\alpha\rho\chi)} - U_{B(\tau\epsilon\lambda)} \\ (\text{χρησιμοποιείται όταν η κίνηση γίνεται σε καμπύλη}) \end{cases}$$



Το σχήμα λέγεται κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο.

$$W_{B(A-\Gamma)} = U_{B(A)} - U_{B(\Gamma)} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot R$$

Για να βρούμε την ταχύτητα στην βάση του τεταρτοκυκλίου εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ (Α-Γ):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m \cdot U^2 = m \cdot g \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{2 \cdot g \cdot R}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΜΕ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ**Ερώτηση 3.39**

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

Σύμφωνα με το Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.), η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος, ισούται με:

- α) Το άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.
- β) Το άθροισμα των έργων εκείνων των δυνάμεων που προσφέρουν ενέργεια στο σώμα.
- γ) Το άθροισμα των έργων των δυνάμεων που καταναλώνουν ενέργεια από το σώμα.
- δ) Το έργο της συνισταμένης δύναμης όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

Ερώτηση 3.40

Σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.),

να αποδείξετε τη σχέση: $S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$

Ερώτηση 3.41

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή: Το Θ.Μ.Κ.Ε.

- α) εφαρμόζεται μόνο όταν το σώμα κινείται ευθύγραμμα
- β) Εφαρμόζεται μόνο όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι σταθερές και όχι μεταβαλλόμενες
- γ) Εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση, παντού και πάντα, γιατί στην ουσία το Θ.Μ.Κ.Ε. είναι η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας
- δ) Εφαρμόζεται μόνο, όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα έχουν μη-μηδενικό έργο

Ερώτηση 3.42

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

- α)** Όταν ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ισχύει $\Sigma W_F = 0$
β) Όταν ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ισχύει $\Sigma W_F < 0$
γ) Όταν ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, ισχύει $\Delta K < 0$
δ) Όταν ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, ισχύει $\Delta K = 0$

Ερώτηση 3.43

Σώμα βάλλεται από σημείο κεκλιμένου επιπέδου με αρχική κινητική ενέργεια 8J ώστε να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα ανεβαίνοντας μηδενίζει κάποια στιγμή τη ταχύτητά του και επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης με ταχύτητα που έχει μέτρο το μισό του μέτρου της αρχικής ταχύτητας βολής του. Κατά το ανέβασμα του σώματος, από το σημείο βολής, μέχρι να μηδενίσει στιγμιαία τη ταχύτητά του, η ενέργεια που έγινε θερμότητα λόγω τριβών είναι:

- α)** 8J **β)** 0J **γ)** 3J **δ)** 16J

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Ερώτηση 3.44

Σώμα βάρους B εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, από το έδαφος, και κατά τη διάρκεια της κίνησής του δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους του. Για την κίνηση του σώματος από το ύψος $h_1 = \frac{h_{\max}}{3}$, ανεβαίνοντας, μέχρι το μέγιστο ύψος $h_{\max}$, η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας θα ισούται με:

- α)** $+\frac{mgh_{\max}}{3}$ **β)** $-\frac{2mgh_{\max}}{3}$ **γ)** $-\frac{mgh_{\max}}{3}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Ερώτηση 3.45

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

Μία δύναμη ονομάζεται συντηρητική όταν:

- α)** Το έργο της είναι πάντα μηδέν.
- β)** Το έργο της κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.
- γ)** Το έργο της από μία θέση Α σε μία θέση Β, δεν εξαρτάται από τη διαδρομή παρά μόνο από την αρχική και τελική της θέση.
- δ)** Το έργο τους είναι πάντα αρνητικό, δηλαδή καταναλώνουν ενέργεια από το σώμα.

Ερώτηση 3.46

Αν διπλασιαστεί η ταχύτητα ενός σώματος, η αρχική του κινητική ενέργεια Κ, αυξάνεται κατά:

- α)** Κ **β)** 2Κ **γ)** 3Κ **δ)** 4Κ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Ερώτηση 3.47

Ποιες από τις παρακάτω δυνάμεις είναι συντηρητικές;

- α)** Βάρος (Β) **β)** Τριβή ($F_{\tau\rho}$) **γ)** Τάση του νήματος (Τ)
- δ)** $F_{\text{ελατηρίου}}$ **ε)** Κάθετη αντίδραση (Ν) **στ)** $F_{\text{ηλεκτρική}}$

Ερώτηση 3.48

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης, από τη θέση Α ως τη θέση Β ισούται με:

- α)** $W_{F_{\text{συντ}}} = F \cdot \Delta x_{A \rightarrow B}$ **β)** $W_{F_{\text{συντ}}} = U_A - U_B$
- γ)** $W_{F_{\text{συντ}}} = U_B - U_A$ **δ)** $W_{F_{\text{συντ}}} = \Delta U$

Ερώτηση 3.49

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

Μηχανική ενέργεια ενός σώματος ονομάζεται:

- α)** Η ενέργεια που παίρνει ένα σώμα από μία μηχανή
- β)** Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος
- γ)** Η θερμότητα που εκλύεται από το σώμα, όταν δέχεται τριβή ολίσθησης
- δ)** Η συνολική ενέργεια – έργο που προσφέρει μία συντηρητική δύναμη

Ερώτηση 3.50

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

Ένα σώμα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του

- α)** Η κινητική του ενέργεια παραμένει σταθερή.
- β)** Η Μηχανική του ενέργεια παραμένει σταθερή.
- γ)** Η δυναμική του ενέργεια λόγω βαρύτητας, παραμένει σταθερή.
- δ)** Ένα μέρος του έργου του βάρους μετατρέπεται σε θερμότητα.

Ερώτηση 3.51

Κατά την ελεύθερη πτώση ενός σώματος από αρχικό ύψος h αγνοούμε τις αντιστάσεις. Θεωρείστε επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια το οριζόντιο επίπεδο που θα φτάσει πέφτοντας το σώμα. Σε ποια θέση της κίνησης του σώματος η δυναμική και η κινητική του ενέργεια εξισώνονται;

- α)** Στο μισό του αρχικού ύψους
- β)** Στο μισό του χρόνου πτώσης
- γ)** Όταν φτάσει στο έδαφος

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Ερώτηση 3.52

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

Ένα σώμα πέφτει ελεύθερα. Όταν βρίσκεται σε ύψος h η κινητική του ενέργεια είναι $6J$, ενώ σε ύψος $h/2$ η κινητική του ενέργεια γίνεται $10J$. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος σε ύψος $h/4$;

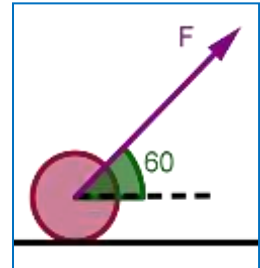
- α)** 12J **β)** 14J **γ)** 16J **δ)** 20J **ε)** 22J

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.53

Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται $F=10\text{N}$ όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος για $x=3\text{m}$.

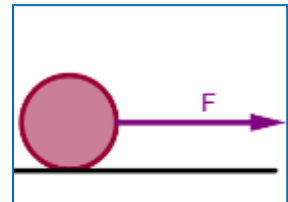
(Απάντηση: $\sqrt{15}\text{m/sec.}$)



Άσκηση 3.54

Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Δύναμη $F=20\text{N}$ κινεί το σώμα. Εάν $T=8\text{N}$ να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος για $x=5\text{m}$.

(Απάντηση: $\sqrt{60}\text{m/sec.}$)



Άσκηση 3.55

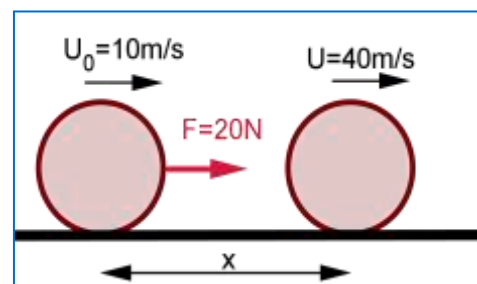
Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με $u_1=10\text{m/sec}$. Να βρείτε την οριζόντια δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε ώστε αν αυτό μετατοπιστεί κατά $x=10\text{m}$ η ταχύτητά του να διπλασιαστεί.

(Απάντηση: 30N.)

Άσκηση 3.56

Σώμα $m=4\text{kg}$ κινείται σε λείο επίπεδο. Εάν $F=60\text{N}$ να βρεθεί η απόσταση x .

(Απάντηση: 50m.)



Άσκηση 3.57

Σώμα μάζας $m=10\text{kg}$ εκτοξεύεται σε οριζόντιο επίπεδο με $u_0=4\text{m/sec}$. Εάν το σώμα δέχεται $T=20\text{N}$ να βρεθεί το διάστημα μέχρι να σταματήσει.

(Απάντηση: 4m.)

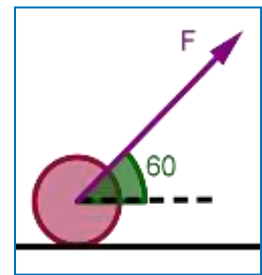
Άσκηση 3.58

Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ ηρεμεί. Ασκούμε οριζόντια δύναμη $F=10\text{N}$ και το σώμα αποκτά μετά από διάστημα x ταχύτητα $u=3\text{m/sec}$. Εάν $\mu=0,1$ να βρείτε το διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να αποκτήσει την ταχύτητα u .

(Απάντηση: $0,5\text{m}$.)

Άσκηση 3.59

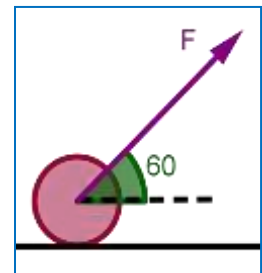
Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ ηρεμεί. Την $t=0$ ασκούμε δύναμη όπως στο σχήμα. Το σώμα αφού διανύει διάστημα $x=2\text{m}$ αποκτά ταχύτητα $u=2\text{m/sec}$. Να βρείτε τη δύναμη F . Δίνεται ότι το επίπεδο είναι λείο.



(Απάντηση: 2N .)

Άσκηση 3.60

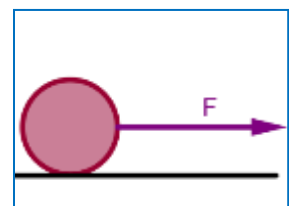
Σώμα $m=1\text{kg}$ ηρεμεί. Την $t=0$ ασκούμε δύναμη $F=10\text{N}$ όπως στο σχήμα. Δίδεται ότι το επίπεδο έχει τριβές και μετά από διάστημα $x=2\text{m}$ το σώμα αποκτά $u=2\text{m/sec}$. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής.



(Απάντηση: $\mu = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{5}$)

Άσκηση 3.61

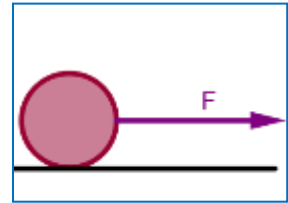
Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ αρχικά είναι ακίνητο. Την $t=0$ ασκούμε οριζόντια δύναμη $F=4\text{N}$ και το σώμα αρχίζει να κινείται. Δίδεται ότι $\mu=0,1$ και ότι η δύναμη παύει να ασκείται μετά τα $x=2\text{m}$. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα, από την $t=0$ μέχρι να σταματήσει.



(Απάντηση: 8m .)

Άσκηση 3.62

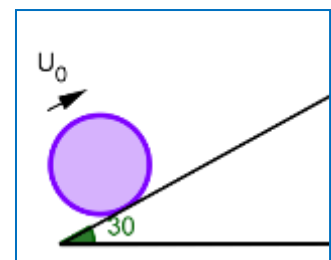
Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ αρχικά ηρεμεί. Την $t=0$ ασκούμε στο σώμα οριζόντια $F=10\text{N}$ και το σώμα αρχίζει να κινείται. Εάν η δύναμη F ασκείται μόνο για $x=2\text{m}$, να βρείτε πόσο διάστημα διανύει το σώμα από την στιγμή που μηδενίστηκε η δύναμη μέχρι το σώμα να αποκτήσει $u=4\text{m/sec}$. Δίνεται ότι $\mu=0,1$.



(Απάντηση: 10m.)

Άσκηση 3.63

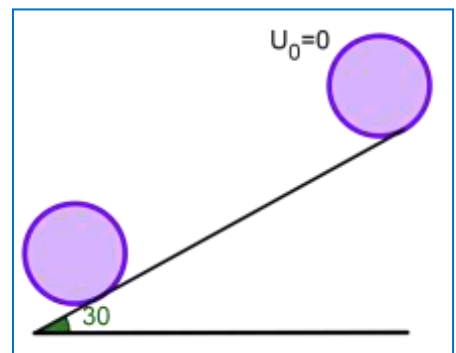
Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα $u_0=10\text{m/sec}$ προς τα πάνω. Να βρείτε πόσο διάστημα διανύει μέχρι να σταματήσει. Δίδεται ότι το επίπεδο είναι λείο.



(Απάντηση: 10m.)

Άσκηση 3.64

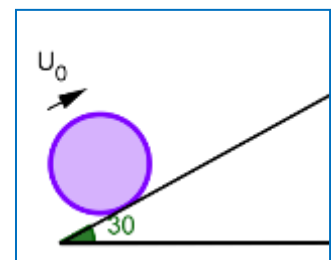
Σώμα μάζας m αφήνεται από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στη βάση του κεκλιμένου εάν δίνεται ότι διανύει διάστημα $x=10\text{m}$.



(Απάντηση: 10m/sec.)

Άσκηση 3.65

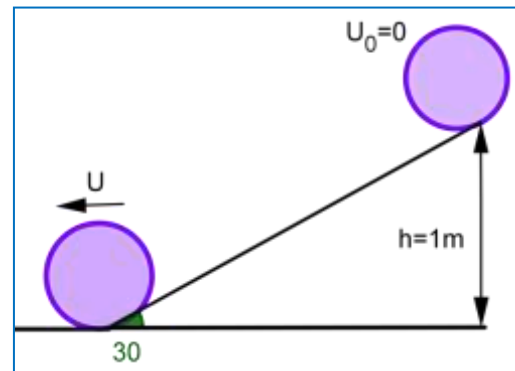
Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με $u_0=10\text{m/sec}$ από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου το οποίο παρουσιάζει τριβές. Να βρείτε τον συντελεστή τριβής εάν δίνεται ότι το σώμα σταματά μετά από $x=2\text{m}$.



(Απάντηση: $\mu=4\sqrt{3}/3$.)

Άσκηση 3.66

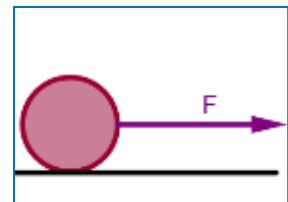
Σώμα μάζας m αφήνεται από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου. Όταν φθάνει στην βάση του εισέρχεται σε ένα οριζόντιο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=0,5$. Να βρείτε πόσο διάστημα διανύει στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει.



(Απάντηση: $x_1=2\text{m}$)

Άσκηση 3.67

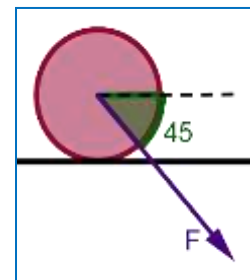
Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ εκτοξεύεται με $u_0=4\text{m/sec}$ και ταυτόχρονα ασκείται οριζόντια δύναμη F . Μετά από κάποιο διάστημα το σώμα αποκτά ταχύτητα $u=10\text{m/sec}$. Να βρεθεί πόση ενέργεια ξοδεύουμε γι' αυτό το διάστημα εάν δίνεται ότι το επίπεδο είναι λείο.



(Απάντηση: 42J .)

Άσκηση 3.68

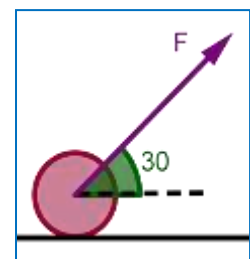
Σώμα μάζας $m=10\text{kg}$ αρχικά είναι ακίνητο. Την $t=0$ ασκούμε δύναμη $F=100\sqrt{2}\text{ N}$ όπως στο σχήμα. Αν $\mu=0,1$ να βρεθεί πόσο διάστημα διανύει το σώμα μέχρι να αποκτήσει $u=20\text{m/sec}$.



(Απάντηση: 25m .)

Άσκηση 3.69

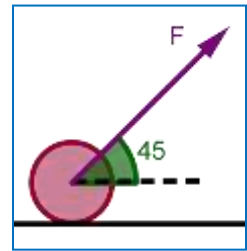
Σώμα μάζας $m=10\text{kg}$ εκτοξεύεται με $u_0=7\text{m/sec}$. Κάποια στιγμή ασκείται $F=20\text{N}$ όπως στο σχήμα. Εάν δίνεται ότι $\mu=\sqrt{3}/10$ να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος μετά από διάστημα $x=75/\sqrt{3}\text{ m}$.



(Απάντηση: 8m/sec .)

Άσκηση 3.70

Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ αρχικά είναι ακίνητο. Την $t=0$ ασκούμε δύναμη $F=5\sqrt{2}\text{N}$ όπως στο σχήμα. Δίδεται ότι ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,2$. Η δύναμη ασκείται για $t=2\text{sec}$ και μετά καταργείται. Να βρεθεί:

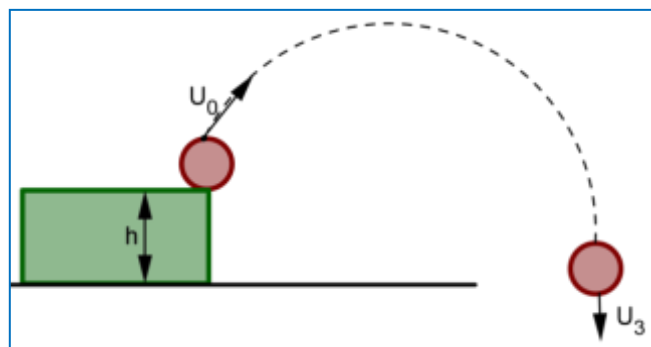
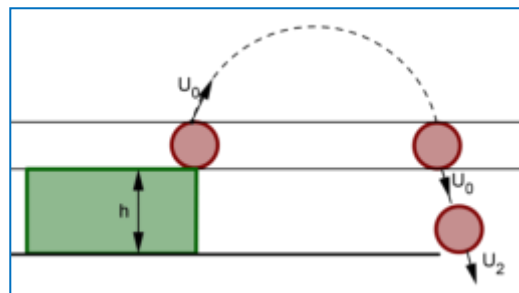
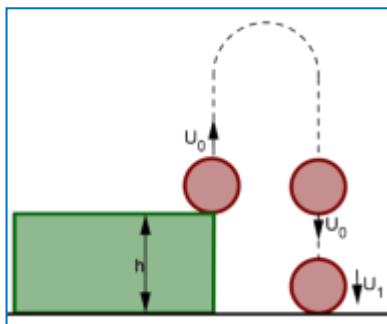


- α) η μέγιστη ταχύτητα.
β) το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει.

(Απάντηση: α) 8m/sec , β) 24m .)

Άσκηση 3.71

Να δικαιολογήσετε την άποψή σας ότι το έργο του βάρους και για τις 3 διαδρομές είναι ίδιο και οι ταχύτητες των σωμάτων πριν ακουμπήσουν στο έδαφος είναι ίσες.



3.7. Ισχύς δύναμης – Έργο μεταβλητής δύναμης

Υπάρχουν δύο τύποι ισχύος:

- ✦ η στιγμιαία
- ✦ η μέση

✧ Η **ισχύς μια δύναμης** λέγεται και ρυθμός μεταβολής της ενέργειας. Για να βρούμε την μέση ισχύ πρέπει να το ζητάει η άσκηση, αλλιώς βρίσκουμε την στιγμιαία.

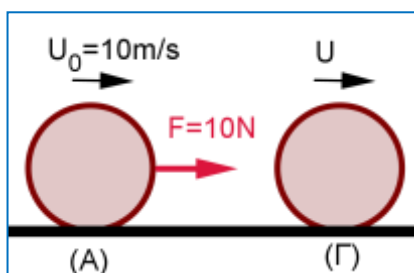
1. Ισχύς δύναμης P_F ή αλλιώς ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας.

$$P_F = \frac{\Delta E_{\text{προσφ}}}{\Delta t} = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot U (\text{Joule} / \text{s})$$

Παράδειγμα 3.72

Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται με αρχική ταχύτητα $U=10\text{m/s}$. Την $t=0$ ασκείται δύναμη $F=10\text{N}$. Να βρεθεί η ισχύς της δύναμης όταν το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά διάστημα $x=15\text{m}$.

Απάντηση



ΘΜΚΕ (Α–Γ):

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_F$$

$$\frac{1}{2} m \cdot U^2 - \frac{1}{2} m \cdot U_0^2 = F \cdot x$$

$$U = 20\text{m/s}$$

$$P_F = \frac{\Delta E_{\text{προσφ}}}{\Delta t} = F \cdot U = 10 \cdot U = 10 \cdot 20 = 200\text{J/s}$$

2. Ισχύς συνισταμένης δύναμης ή αλλιώς ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)$.

$$P_{\Sigma F} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}}{\Delta t} = \frac{W_{\Sigma F_x}}{\Delta t} = \frac{\Sigma F_x \cdot \Delta x}{\Delta t} = \Sigma F \cdot U$$

3. Ισχύς της τριβής ή αλλιώς ρυθμός παραγωγής θερμότητας $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)$.

$$P_T = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{W_T}{\Delta t} = -\frac{T \cdot \Delta x}{\Delta t} = -T \cdot U$$

Παράδειγμα 3.73

Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται με αρχική ταχύτητα $U=2\text{m/s}$, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής $\mu=0,1$. Την $t=0$ ασκείται δύναμη $F=4\text{N}$. Να βρεθούν:

- α) ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας
 - β) ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας
- όταν το σώμα έχει διανύσει απόσταση $x=2\text{m}$.

Απάντηση

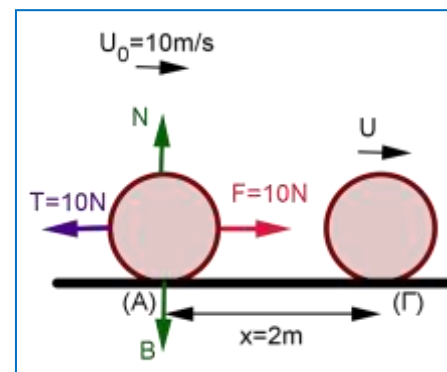
α) ΘΜΚΕ (Α-Γ): $K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_F - W_T$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = F \cdot x - \mu \cdot m \cdot g \cdot x \Rightarrow v = 4\text{m/s}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot U = (F - \mu \cdot N)U = (F - \mu \cdot m \cdot g)U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 12 \text{ J/s}$$

β) $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -T \cdot U = -\mu \cdot m \cdot g \cdot U = -4 \text{ J/s}$



4. Μέση ισχύς $\bar{P}$.

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \Rightarrow \frac{F \cdot x}{t} \quad \text{ή} \quad \frac{T \cdot x}{t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Sigma F_x \cdot x}{t}$$

3.8. Πώς υπολογίζω το έργο μεταβλητής δύναμης που εξαρτάται από το x

Παράδειγμα 3.74

Στο σώμα ασκούμε μεταβλητή δύναμη F της μορφής $F=5x$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν:

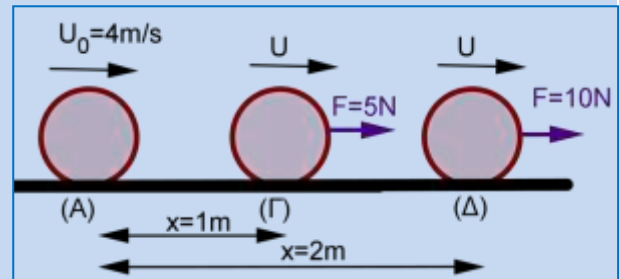
- α) έχει διανύσει 1m
- β) έχει διανύσει 2m.

Δίνεται η μάζα του σώματος $m=1\text{kg}$.

Απάντηση

ΜΕΘΟΔΟΣ

Το πρόβλημα είναι πώς υπολογίζεται το έργο μιας μεταβλητής δύναμης. Ο τύπος $W_F = F \cdot x$ ισχύει μόνο για σταθερές δυνάμεις. Για να βρούμε το έργο μιας μεταβλητής δύναμης κάνουμε τα εξής:



- ⇒ Βήμα 1^ο: Κάνουμε την γραφική παράσταση της δύναμης F .
- ⇒ Βήμα 2^ο: Το έργο υπολογίζεται από το εμβαδόν του σχήματος μεταξύ της ευθείας και του άξονα x .
- ⇒ Βήμα 3^ο: Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ.

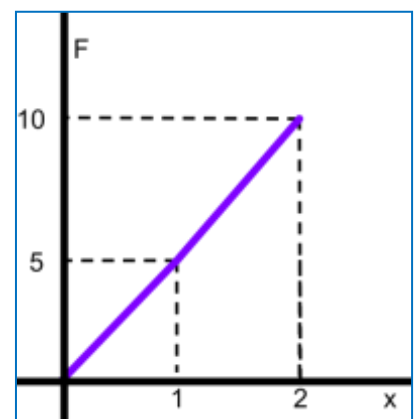
$$W_{F(0,1)} = E_{\text{τρογ}} = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2,5$$

$$W_{F(0,2)} = E_{\text{τρογ}} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10$$

ΘΜΚΕ (Α-Γ):

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = W_{F(0,1)}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = 2,5$$



$$U^2 - U_0^2 = 5 \rightarrow U = \sqrt{U_0^2 + 5} \Rightarrow U = \sqrt{16 + 5} \Rightarrow U = \sqrt{24} \text{ m/s}$$

ΘΜΚΕ (Α-Δ):

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = 10 \rightarrow U = \sqrt{U_0^2 + 10} \rightarrow U = \sqrt{26} \text{ m/s}$$

Παράδειγμα 3.75

Σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε οριζόντια δύναμη F που δίνεται από την σχέση $F = 20 - 5x$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,1$, να βρείτε την ταχύτητα του σώματος στη θέση που η δύναμη μηδενίζεται.

Απάντηση

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m \cdot g \Rightarrow N = 50 \text{ N}$$

$$T = \mu \cdot N = 0,1 \cdot 50 \Rightarrow T = 5 \text{ N}$$

$$F = 20 - 5x \Rightarrow 0 = 20 - 5x \Rightarrow$$

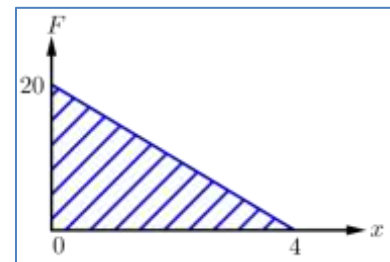
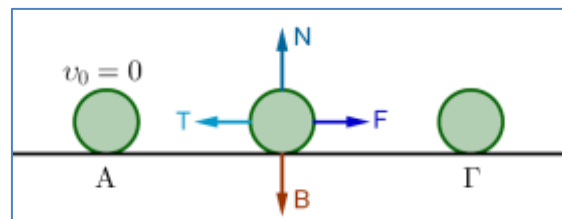
$$\Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{5} \Rightarrow x = 4 \text{ m}$$

$$F = 20 - 5x$$

$$\text{Για } x = 0: F = 20$$

$$\text{Για } x = 4: F = 0$$

$$W_{F(0-4)} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 = 40 \text{ J}$$



$$\text{Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. (Α - Γ): } K_{(\Gamma)} - K_{(A)}^0 = W_F - W_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 40 - T \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 40 - 5 \cdot 4 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = 40 - 20 \Rightarrow \frac{v^2}{2} = 20 \Rightarrow v^2 = 40 \Rightarrow v = \sqrt{40} \text{ m/s}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Άσκηση 3.76**

Σε ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$, που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$F = 20 + 3x$ (S.I.), όπου x η απόσταση που διανύει το σώμα. Ο συντελεστής τριβής είναι $\mu = 0,5$ και το σώμα μετατοπίζεται κατά 10 m . Να βρείτε:

- α) Το έργο της F
- β) Το έργο της τριβής
- γ) Την ταχύτητα του σώματος όταν έχει μετατοπιστεί κατά 10 m .

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Άσκηση 3.77

Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι ακίνητο επάνω σε οριζόντιο επίπεδο, στη θέση $x=0 \text{ m}$, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,3$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση: $F = 10 - 2x$ στο S.I.

- α) Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος, όταν έχει μετακινηθεί κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$.
- β) Σε ποιά θέση x το σώμα θα αποκτήσει τη μέγιστη ταχύτητά του;
- γ) Προσδιορίσατε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με τη θέση x του σώματος και υπολογίσατε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

- δ) Σε ποιά θέση x_1 η επιτάχυνση του σώματος έχει μέτρο $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$;

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Άσκηση 3.78

Σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ είναι ακίνητο στη θέση $x=0$, σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση: $F = 10 + 2x$ στο S.I.

- α)** Υπολογίστε την επιτάχυνση με την οποία αρχίζει να κινείται το σώμα.
- β)** Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σώματος, καθώς και την ταχύτητά του, όταν έχει μετακινηθεί κατά $\Delta x_1 = 8\text{m}$.
- γ)** Πόση θερμότητα έχει παραχθεί λόγω τριβής, όταν το σώμα έχει διανύσει διάστημα $\Delta x_2 = 5\text{m}$.
- δ)** Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται η ταχύτητά του όταν βρίσκεται στη θέση $x = 2\text{m}$; Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

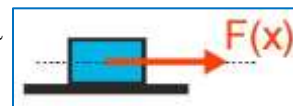
Άσκηση 3.79

Σε σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο κάποια στιγμή ασκείται μια δύναμη $\vec{F}$ με οριζόντια σταθερή διεύθυνση που το μέτρο της μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $F = 2x + 8$ (x : σε m, F σε N). Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και στο οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu=0,2$.

- α)** Θα κινηθεί το σώμα εξαιτίας της δύναμης F ;
- β)** Αν ναι να υπολογίσετε το έργο της καθώς και το έργο της τριβής πάνω στο σώμα για μετατόπιση κατά $x=6\text{m}$. Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$.

Άσκηση 3.80

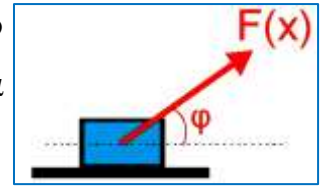
Σώμα ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μεταβλητού μέτρου και σταθερής κατεύθυνσης ασκείται πάνω στο σώμα (διπλανό σχήμα). Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x , σύμφωνα με τη σχέση: $F = 5 + 2x$ (S.I.)



- α)** Να υπολογίσετε την ενέργεια που δόθηκε στο κιβώτιο από τη δύναμη $\vec{F}$, ύστερα από μετατόπιση $x=10\text{m}$.
- β)** Να υπολογίσετε το μέτρο της κινητικής ενέργειας του σώματος, μετά την παραπάνω μετατόπιση. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Άσκηση 3.81

Σώμα μάζας $m=10\text{kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,25$. Οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μεταβλητού μέτρου και σταθερής κατεύθυνσης



ασκείται πάνω στο σώμα. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x , σύμφωνα με τη σχέση: $F = 50 + 2,5 \cdot x$ (S.I.)

Η δύναμη $\vec{F}$, σχηματίζει γωνία φ με το δάπεδο (διπλανό σχήμα), για την οποία γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\varphi=0,8$.

- α)** Να υπολογίσετε την απόσταση x στην οποία το σώμα θα χάσει την επαφή με το έδαφος.
- β)** Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος, τη στιγμή που σηκώνεται από το έδαφος.
- γ)** Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, τη στιγμή που σηκώνεται από το έδαφος. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Άσκηση 3.82

Ένα σώμα μάζας 2kg , ηρεμεί σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ μέτρου $F=10\text{N}$, με αποτέλεσμα να κινηθεί και τη στιγμή που έχει διανύσει απόσταση 10m να έχει ταχύτητα 8m/s .

A. Να σχεδιάσετε στο σχήμα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για την παραπάνω μετακίνηση.

B. Να εφαρμόσετε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής που ασκείται στο σώμα. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου.

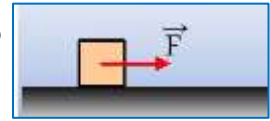
Γ. Σε μια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κίνησης το σώμα έχει ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$. Για την στιγμή αυτή να βρεθούν:

- α)** Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής.
- β)** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Άσκηση 3.83

Ένα σώμα μάζας 4kg, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Σε μια στιγμή



δέχεται την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$, με αποτέλεσμα να κινηθεί και τη στιγμή που έχει διανύσει απόσταση 20m να έχει αποκτήσει ταχύτητα $v=10\text{m/s}$.

A. Να σχεδιάσετε στο σχήμα τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε την τριβή που ασκείται στο σώμα και το έργο της τριβής για την παραπάνω μετακίνηση.

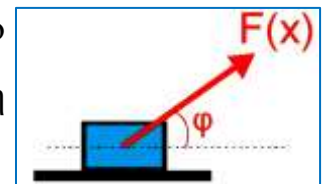
B. Να εφαρμόσετε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για την παραπάνω μετακίνηση.

Γ. Σε μια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κίνησης το σώμα έχει ταχύτητα $v_2=4\text{m/s}$, ενώ επιταχύνεται με επιτάχυνση $a=2\text{m/s}^2$. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

- α)** Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- β)** Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Άσκηση 3.84

Σώμα με μάζα $m=4\text{kg}$ αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα δύναμη $\vec{F}$ που η διεύθυνση της είναι σταθερή και σχηματίζει γωνία ϕ προς τα



πάνω με το οριζόντιο επίπεδο (σχήμα). Το μέτρο της F μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $F=5x+10$ (S.I.) όπου x είναι η μετατόπιση του σώματος από τη θέση στην οποία άρχισε να ασκείται η δύναμη. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και στο οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu=0,5$.

- α)** Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής, για μετατόπιση του σώματος κατά $x=6\text{m}$.
- β)** Ποια η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ όταν έχει μετατοπιστεί κατά 6m και με ποιο ρυθμό παράγεται θερμότητα εκείνη τη στιγμή
- γ)** Ποια η ισχύς της τριβής και με ποιο ρυθμό προσφέρεται ενέργεια στο σώμα τη στιγμή που χάνει την επαφή του με το δάπεδο.

Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\phi=0,8$, $\sin\phi=0,6$.

γ) ΘΜΚΕ (Α-Ε):

$$K_{(E)} - K_{(A)} = W_B$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = U_{(A)} - U_{(E)}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U^2 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 =$$

$$= -2m \cdot g \cdot h \quad (1)$$

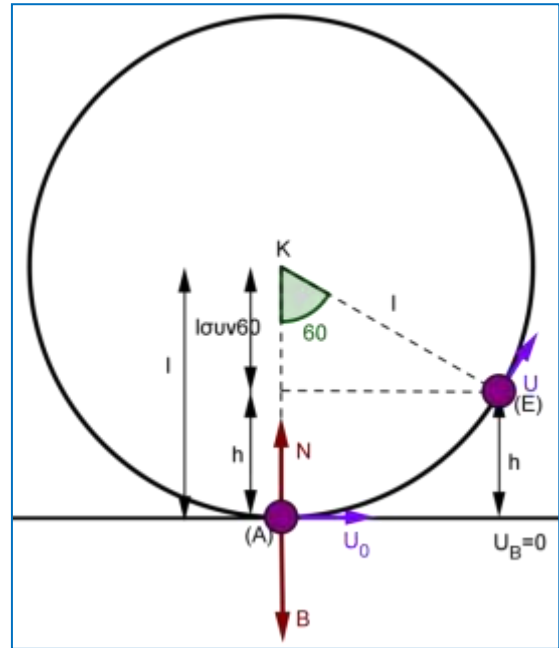
⇒ Εύρεση του h:

$$h = l - l \sin 60 \Rightarrow h = l \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = l \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5m$$

Από σχέση (1):

$$U^2 - 100 = -2 \cdot 10 \cdot 0,5 \Rightarrow U^2 = 90 \Rightarrow U_1 = \sqrt{90}m/s$$



Παράδειγμα 3.86

Σώμα μάζας 1kg εκτοξεύεται με $U=4m/s$, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο όταν σταματάει. Δίνεται $l=1m$.

Απάντηση

ΘΜΚΕ (Α-Γ):

$$K_{(Γ)} - K_{(A)} = W_B$$

$$0 - \frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = U_{(A)} - U_{(Γ)}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot U_0^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$8 = 10h \Rightarrow h = \frac{8}{10} = 0,8m$$

$$h = l - l \sin \varphi \Rightarrow 0,8 = 1 - \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = 1 - 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = 0,2$$

